

坐标系与参数方程考点分析

■ 广东省信宜市教育局教研室 王位高

新课程全国卷高考数学对选做题“坐标系与参数方程”的考查是从极坐标与参数方程角度来研究直线与圆锥曲线的相关性质,设置在难度上相对稳定,属于中档难度,是普通高考生的重要得分点,但由于题目形式变化多样,如果考生不对所学的知识融会贯通,想拿到高分还是有一定难度的,对于全国卷 I 选做题“坐标系与参数方程”,2018 年广东评卷场反馈的平均分(文理合在一起统计)是 5.3 分,2017 年文数 3.48 分(样本 288737 份)、理数 5.27 分(样本 317995 份);2016 年文数 4.24 分、理数 6.71 分。(2017 年、2016 年平均分根据《广东高考年报》数据)。

认真研究历年高考真题,总结高考命题规律,对于提高高考数学分数有重要意义.笔者对《坐标系与参数方程》考点内容进行分类分析,并针对广东考生的实际选取典型题目训练,希望同学们看后有所收获,夺取满意分数.要提醒的是,全国卷 3 套试题的坐标系与参数方程命题者都是相同的,同学们复习时可以将它们一起研究.

一、坐标系与参数方程选做题 2018 年全国卷高考题分析

1. (全国 I 卷) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的方程为 $y=k|x|+2$. 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2+2\rho\cos\theta-3=0$.

(1) 求 C_2 的直角坐标方程;

(2) 若 C_1 与 C_2 有且仅有三个公共点, 求 C_1 的方程.

解析: (1) 由 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ 得 C_2 的直角坐标方程为 $(x+1)^2+y^2=4$.

(2) 由 (1) 知 C_2 是圆心为 $A(-1, 0)$, 半径为 2 的圆. 由题设知, C_1 是过点 $B(0, 2)$ 且关于 y 轴对称的两条射线. 记 y 轴右边的射线为 l_1 , y 轴左边的射线为 l_2 . 由于 B 在圆 C_2 的外面, 故 C_1 与 C_2 有且仅有三个公共点等价于 l_1 与 C_2 只有一个公共点且 l_2 与 C_2 有两个公共点, 或 l_2 与 C_2 只有一个公共点且 l_1 与 C_2 有两个公共点. 当 l_1 与 C_2 只有一个公共点时, A 到 l_1 所在直线的距离为 2, 所以 $\frac{|-k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$, 故 $k=-\frac{4}{3}$ 或 $k=0$.

经检验, 当 $k=0$ 时, l_1 与 C_2 没有公共点; 当 $k=-\frac{4}{3}$ 时, l_1 与 C_2 只有一个公共点, l_2 与 C_2 有两个公共点.

当 l_2 与 C_2 只有一个公共点时, A 到 l_2 所在直线的距离为 2, 所以 $\frac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$, 故 $k=0$ 或 $k=\frac{4}{3}$. 经检验, 当 $k=0$ 时, l_1

与 C_2 没有公共点; 当 $k=\frac{4}{3}$ 时, l_2 与 C_2 没有公共点.

综上, 所求 C_1 的方程为 $y=-\frac{4}{3}|x|+2$.

【点评】本题第 (1) 小题考查极坐标方程与直角坐标方程的相互转化. 利用 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ 将普通方程转化为极坐标方程是解决此类题目的一般思路. 第 (2) 小题考查直线与圆的位置关系, 考查数形结合思想, 考查考生的运算求解能力及分析问题与解决问题的能力.

2. (全国 II 卷) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=4\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数), 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+t\cos\alpha \\ y=2+t\sin\alpha \end{cases}$ (t 为参数).

(1) 求 C 和 l 的直角坐标方程;

(2) 若曲线 C 截直线 l 所得线段的中点坐标为 $(1, 2)$, 求 l 的斜率.

解析: (1) 曲线 C 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$.

当 $\cos\alpha \neq 0$ 时, l 的直角坐标方程为 $y=\tan\alpha \cdot x+2-\tan\alpha$,

当 $\cos\alpha=0$ 时, l 的直角坐标方程为 $x=1$.

(2) 将 l 的参数方程代入 C 的直角坐标方程, 整理得关于 t 的方程

$$(1+3\cos^2\alpha)t^2+4(2\cos\alpha+\sin\alpha)t-8=0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

因为曲线 C 截直线 l 所得线段的中点 $(1, 2)$ 在 C 内, 所以 $\textcircled{1}$ 有两个解, 设为 t_1, t_2 , 则 $t_1+t_2=0$.

又由 $\textcircled{1}$ 得 $t_1+t_2=-\frac{4(2\cos\alpha+\sin\alpha)}{1+3\cos^2\alpha}$, 故 $2\cos\alpha+\sin\alpha=0$, 于是直线 l 的斜率 $k=\tan\alpha=-2$.

【点评】本题第 (1) 小题考查参数方程与直角坐标方程的转化, 利用三角函数的平方关系式: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; 第 (2) 小题考查直线参数方程的几何意义, 并与三角函数知识进行综合考查.

3. (全国 III 卷) 在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot O$ 的参数